MATEMATIK:

Miljømatematik

Arbejdsark til lektie: 2, modul 1:

Spilteori og Nash ligevægt

I en indledende meget simpel modellering af dette, kan vi give de to landegrupper to muligheder – at *investere* i begrænsningen af CO_2 udledning eller *lade stå til* i udledningen af CO_2. For at kunne analyse dette problem vha. en matematisk model, er vi nødt til at kunne vurdere nationernes *udbytte* af situationen - vi må kvantificere noget kvalitativt: hvad får nationerne ud af at gøre det ene eller det andet.
Vi kalder dette udbytte "tilfredshed". I en meget idealistisk verden må begge nationer være 1) mest tilfredse, hvis begge handler, 2) mindre tilfredse hvis de kun selv handler og 3) mindst tilfredse, hvis ingen handler.

Tildeler vi "tilfredshed" værdien fra -2 til 3 kan vi opstille følgende tabel, som i spilteorien kaldes en *udbyttematrix:*

	U-land		
I-land		Investere	Lade stå til
	Investere	(3,3)	(0,2)
	Lade stå til	(2,0)	(-2,-2)

Tabel 1: udbyttematrix for I-land og U-land.

Cellerne i denne matrix skal læses som et talpar, der hænger sammen. Det første tal er I-landenes udbytte, det andet U-landenes. Således har vi tildelt I-landene tilfredsheden 3, hvis de selv investerer og U-landene også gør dette. Mens U-landene er 2 tilfredse, hvis de selv lader stå til og I- landene investerer. Bemærk, at det her er underforstået at alle taber (udbyttet er negativt) hvis begge aktører lader stå til

Opgave 2: Diskuter kvantificeringen i tabel 1. Er værdierne passende? Prøv at lave en anden tabel med andre tal.

I modellen ligger der implicit, at alle spillere har det man kalder for *fuld information* om hvilket udbytte modparten får af en given strategi (eller også fastsætter man selv en værdi for modstanderens udbytte ud fra et skøn og er derefter i en situation hvor man kan analysere videre).

Den *matematiske modellering* består af kvantificeringen af udbyttet og den matematiske konklusion dette danner baggrund for at lave. Et sæt af strategier – dvs. et *talpar* i tabel 1 - blev af matematikeren John Nash (1928-2015) defineret som en *Nash-ligevægt*, hvis hver spillers strategi er "best response" til de andre spilleres strategier. Dvs. en Nash ligevægt er en situation *hvor ingen spillere har lyst til at afvige fra deres strategi, selvom de kender de andre spilleres strategi*. Med "lyst" menes selvfølgelig, at man ikke bliver bedre stillet ved at ændre sit valg – altså et rationelt valg: en "løsning" hvor *alle*, givet den viden man besidder, ikke kan få et større udbytte ved at vælge noget andet.

En matematisk definition af Nashs ligevægtsbegreb er:

En Nash-ligevægt er et talpar (xi;yi) i tabellen, hvor:

xi er større end alle andre x-værdier i kolonnen j og yj er større end alle andre y-værdier i rækken i.

		Kolonne j:				
		1		**j**		**n**
Række i:	**1**			x1<xi		
				...		
	i	y1<yj	...	**(xi;yi)**	...	yj>yn
				...		
	n			xi>xn		

I tabel 1 er talparret (3,3) en Nash-ligevægt, da ingen af de to spillere får større tilfredshed ud af at vælge andet, *selvom* de kender den andens valg. Ved I-landene f.eks, at U-landene IKKE vil investere, vil I-landene stadigvæk – med denne udbyttematrix – få mest ud af at handle selv. Og når U-landene så ved, at I-landene vil investere, får de selv mere ud af at investere. De går fra udbytte 2 til 3. (investere, investere) er derfor en Nash-ligevægt.

Opgave 3: Prøv at forklare med egne ord, hvad en Nash ligevægt er. Og se om din egen, nye tabel fra opgave 2 også har en ligevægt?

I en konkret problemstilling - et spil - vil man opskrive en udbyttematrix (den matematiske model) og afmærke de værdier, som har den maksimale værdi i rækkerne og søjlerne. Således finder man Nash-ligevægten i tabel 1, ved at kigge på søjlerne og det første tal i de to talpar her. Hvor er det største? Dernæst kigger man på de rækkerne og det sidste tal i disse talpar. Hvor er det største her? Disse tal er understreget med rødt i tabel 2.

		U-land	
I-land		Investere	Lade stå til
	Investere	(3,3)	(0,2)
	Lade stå til	(2, 0)	(-2,-2)

Tabel 2. illustration af hvordan man finder Nash ligevægten.

Det ses i tabel 2, at der kun er et sted, at begge er enige om strategien (de to tal i et talpar er begge streget under) – og vi har dermed en ligevægt: begge skal investere.

I et spil kan der være en, flere eller ingen ligevægt. Hvis der er ingen eller flere må vi anvende andre metoder til at afgøre hvad spilleren skal vælge – mere om det senere. Men hvis der ER en ligevægt vil spillerne rationelt vælge denne.

Lad os illustrere det sidste ved at ændre lidt på vores udbytte fra CO_2 eksemplet. Hvis vi antager, at udbyttet ikke mere blot er "tilfredshed", men også indeholder økonomiske overvejelser, vil der være baggrund for at sætte udbyttet lavere når begge handler, end når modparten handler og man ikke selv gør. Dette skyldes overvejelser om, at man selv får en masse ud af ikke at gøre noget, hvis den anden part investere. Klimaet er jo ikke lokalt og man kan eventuelt stjæle teknologi uden at bruge mange penge på udvikling. Eller man kan ganske simpelt opleve at klimaet omkring ens eget land bliver bedre, hvis de andre lande gør noget ved det.

Vi kan dermed få følgende udbyttematrix – med optimale strategier illustreret med en understregning:

		U-land	
I-land		Investere	Lade stå til
	Investere	(1,1)	(0,2)
	Lade stå til	(2, 0)	(-2,-2)

Tabel 3: en udbyttematrix med overvejelser om økonomi

Både (lade stå til, investere) og (investere, lade stå til) er Nash ligevægte, da ingen af spillerne – givet den andens strategi – vil have lyst til at vælge en anden strategi. (Investere, investere) er ikke mere en ligevægt, da I-landene vil få et større udbytte af at lade stå til, hvis de ved U landene handler.
Problemet i denne matrix er, at de to ligevægte består af *bedste*, henholdsvis *næstdårligste* udfald for de to spillere. Altså at begge ligevægte giver en klar "taber". Der er derfor en nærliggende mulighed for, at landene ender med at få deres værste udbytte i (lade stå til, lade stå til). Spillet vil så at sige ikke kunne "falde til ro", da der vil være en fokusering mod to meget forskellige ligevægte. Og konsekvensen kunne således være at begge lande lader stå til.

Denne viden kan bruges af spillerne, til at "spille hårdt mod hårdt" og forsøge at overbevise sin modstander om, at man er villig til at risikere alt (i dette tilfælde miljøet!) og dermed tvinge modstanderen til at undvige katastrofen – og altså i dette spil investere.

Opgave 4: lad en udbyttematrix uden en Nash ligevægt. Og en med to ligevægte, som i tabel 3.

Hårdt mod hårdt-konflikten kaldes også "chicken", efter en farlig bil-leg fra 60'ernes USA, hvor to "spillere" startede med front mod hinanden, og det drejede sig om at få modstanderen til at undvige en mulig kollision ved at forsøge at overbevise ham om at man ikke selv vil undvige.

Vi kan ikke give en konkret løsning på "chicken" spillet ud fra den præsenterede spilteori – der er jo flere muligheder. Men som vi skal se senere, kan vi give begge spillere et bedre beslutningsgrundlag.

Inden vi gør det vil vi dog igen ændre lidt på udbyttematricen i vores eksempel. Befolkningen i I-landene vil nu presse deres regering til at investere – ellers vil de ikke blive genvalgt. Noget lignende gør sig ikke gældende for U-landene – og vi har dermed det man kalder et et *asymmetrisk spil*, hvor begge spillere ikke får samme udbytte ud af samme strategi. Matricen er ikke mere symmetrisk, som i tabel 2.
Ud fra dette setup kan man forestille sig følgende udbyttematrix – med Nash ligevægten understreget:

	U-land		
I-land		Investere	Lade stå til
	Investere	(2,1)	<u>(1,2)</u>
	Lade stå til	(1, 0)	(-2,-2)

Tabel 4. Et asymmetrisk spil

Her vil (investere, lade stå til) være en ligevægt, og dette skyldes vores valg af kvantificering. Hvis I-landene så at sige "har en samvittighed" – og U landene ikke - vil I-landene handle, men U-landene ikke.

Opgave 5: Argumenter for at (1,2) er en Nash-ligevægt i tabel 4. Kan du opstille en anden asymmetrisk udbyttematrix?

De ovenstående eksempler og teoretiske overvejelser kan først og fremmest bruges til at *illustrere* spilteoriens anvendelse i klimapolitikken. Det skulle allerede nu være klart, at spilteorien kræver en helt anden indgangsvinkel end den samfundsanalytiske. Og vi er nødt til at være meget præcise i vores modelopstilling - kvantificeringen. Det ser ikke ud til at være nok at tildele landene valgmulighederne "investere" eller "lade stå til" og det er nok også forventeligt, at "spillet om klimaet " er et asymmetrisk spil, nemlig at begge aktører ikke får samme udbytte ud af samme valg.

Den spilteoretiske model *kan* udbygges til at omfatte disse mere omfattende problemer. Ofte vil man dog stå i en situation hvor man som matematiker skal vælge mellem en simpel model, som giver begrænset information eller en kompliceret model, som giver mere information. Dilemmaet ligger her i, at den komplicerede model er svær at håndtere og kræver mange parametre som input, hvorimod den simple model giver hurtige resultater og er nem at arbejde med.

Opgave 6: Et kærestepar skal i biografen. Manden vil helst se en action-film, mens kvinden er til romantik. De er dog enige om, at de allerhelst vil være sammen - og ikke hver for sig. Opstil "udbyttevurderinger" og analyser problemet vha. forskellige udbyttematricer og spilteori. Hvad ender parret med at gøre? - hvor er ligevægten?